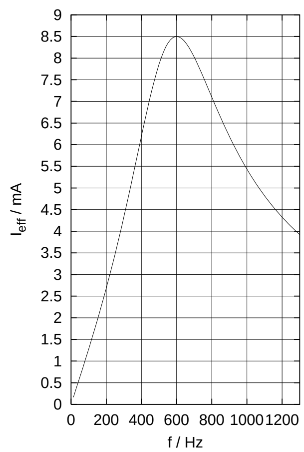
Physik Klausur 12.2 — 2

30. April 2003

Aufgabe

Ein Birnchen mit dem ohmschen Widerstand R, eine Spule mit der Eigeninduktivität L (ohmscher Widerstand vernachlässigbar) und ein Kondensator mit der Kapazität C sind in Reihe geschaltet und an einen Sinusgenerator angeschlossen.
Die effektive Generatorspannung wird auf $1,00\,\mathrm{V}$ eingestellt und konstant gehalten.
Man misst die effektive Stromstärke I_{eff} im Stromkreis in Abhängigkeit von der Generatorfrequenz f und erhält folgendes Diagramm.



a)
- Skizziere die Schaltung mit obigen Bauteilen, einschließlich Voltmeter und Ampèremeter.
- Begründe den Verlauf der Kurve.
- Berechne R und L, wenn die Kapazität des Kondensators $C = 2,00\,\mu\mathrm{F}$ beträgt. (Anmerkung.: Verwende dazu die Werte von $f_1 = 200\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 600\,\mathrm{Hz}$)

b) Es seien $R = 118\,\Omega$, $L = 35,2\,\mathrm{mH}$ und $C = 2\,\mu\mathrm{F}$.

- Berechne bei der Generatorspannung $U_{\mathrm{eff}} = 1,00\,\mathrm{V}$ und der Generatorfrequenz $f_1 = 200\,\mathrm{Hz}$ die effektiven Teilspannungen, die am Wiederstand, an der Spule und am Kondensator gemessen werden können.
- Addiere diese Teilspannungen zeichnerisch und erläutere das Ergebnis.
- Berechne die Phasenverschiebung zwischen Strom und angelegter Spannung.
- *Zusatzaufgabe, die wegen zu wenig Zeit in der Klausur gestrichen wurde:* Skizziere den Verlauf der Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Generatorfrequenz.
- Berechne die Wirkleistung im Stromkreis.

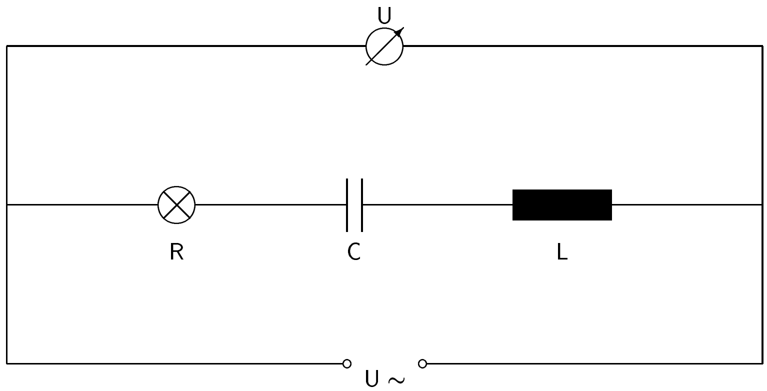
c)
- Berechne mit den in Teilaufgabe b angegebenen Werten die maximale magnetische und die maximale elektrische Feldenergie, die bei der Generatorfrequenz $f_2 = 600\,\mathrm{Hz}$ auftreten.
- Interpretiere dieses Ergebnis.

d) Das obige Birnchen soll in einem neuen Stromkreis an $U_{\text{eff}} = 2,00\,\text{V}$, $f = 200\,\text{Hz}$ angeschlossen werdem und durch eine vorgeschaltete Spule mit vernachlässigbarem ohmschen Widerstand geschützt werden.

- Fertige eine Schaltskizze an.
- Welche Induktivität muss diese Spule mindestens haben, damit das Birnchen nicht durchbrennt?

Lösung

a) • Schaltskizze [1]:



• Ein Kondesator hat bei niedriger Frequenz f einen hohen Widerstand X_C, der mit zunehmender Frequenz f abnimmt. Der Widerstand X_L der Spule verhält sich dagegen genau umgekehrt. Somit muss es einen Punkt geben, an dem der Gesamtwiderstand am geringsten ist (Resonanzfall). Da die Spannung an Spule und Kondensator um 180° phasenverschoben sind, heben sich diese bei der Ressonanzfrequenz f_0 exakt auf und es ist praktisch nur noch der ohmsche Widerstand im Stromkreis „aktiv“, d.h. für die Effektivestromstärke relevant.

• Dem I/f-Diagramm entnimmt man, dass die Resonanzfrequenz $f_0 = 600\,\mathrm{Hz}$ beträgt und

$$I_{\mathrm{eff}}(f_0) = 8,5\,\mathrm{mA} \tag{1}$$

ist. Somit gilt für den ohmschen Widerstand

$$R = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{I_{\mathrm{eff}}} = \frac{1,00\,\mathrm{V}}{8,5\,\mathrm{mA}} = \underline{\underline{118\,\Omega}}$$

Im Ressonazfall sind kapazitiver und induktiver Widerstand gleich groß (da an beiden die gleiche Effektivspannung abfallen muss). Aus

$$\omega\,L = \frac{1}{\omega\,C}$$

folgt für die Induktivität der Spule

$$L = \frac{1}{\omega^2\,C} = \frac{1}{(2\,\pi\,f)^2 \cdot C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 600\,\mathrm{Hz})^2 \cdot 2,00\,\mu\mathrm{F}} = \underline{\underline{35,2\,\mathrm{mH}}}$$

b) • Für den Scheinwiderstand der Schaltung gilt

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2} = \sqrt{118^2\,\Omega^2 + \left(2\,\pi \cdot 200\,\mathrm{Hz} \cdot 35,2\,\mathrm{mH} - \frac{1}{2\,\pi \cdot 200\,\mathrm{Hz} \cdot 2\,\mu\mathrm{F}}\right)} = 373\,\Omega$$

Somit beträgt die effektive Stromstärke

$$I_{\mathrm{eff}} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{Z} = \frac{1,00\,\mathrm{V}}{375\,\Omega} = 2,68\,\mathrm{A}$$

Die Teilspannung am ohmschen Widerstand beträgt folglich

$$U_R = I_{\mathrm{eff}}\,R = 2,68\,\mathrm{mA} \cdot 118\,\Omega = \underline{\underline{317\,\mathrm{mV}}}$$

und an der Spule

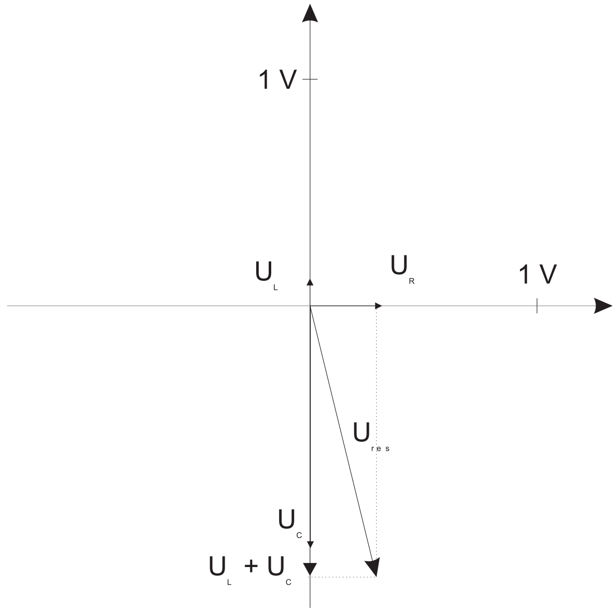
$$U_R = I_{\mathrm{eff}}\,X_L = I_{\mathrm{eff}}\,2\,\pi\,f\,L = 2,68\,\mathrm{mA} \cdot 2\,\pi \cdot 200\,\mathrm{Hz} \cdot 35,2\,\mathrm{mH} = \underline{\underline{119\,\mathrm{mV}}}$$

sowie die Teilspannung am Kondensator

$$U_R = I_{\mathrm{eff}}\,X_C = I_{\mathrm{eff}} \cdot \frac{1}{2\,\pi\,f\,C} = \frac{2,68\,\mathrm{mA}}{2\,\pi \cdot 200\,\mathrm{Hz} \cdot 2\,\mu\mathrm{F}} = \underline{\underline{1,07\,V}}$$

[1] Eine Spule kann in einer Schaltskizze, wenn es nur auf die Induktivität ankommt, auch als ausgefülltes Rechteck gezeichnet werden. Dies wurde der Einfachheit halber hier getan.

- Das Zeigerdiagramm dieser Spannungen sieht folgendermaßen aus:



- Die Phasenverschiebung berechnet sich nach

$$\tan\varphi_0 = \frac{X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}}{R} = \frac{44,2\,\Omega - 397,9\,\Omega}{118\,\Omega} = -3,00$$

und daraus trivial der Winkel

$$\varphi_0 = \arctan(-3,00) = \underline{\underline{-71,5^\circ}}$$

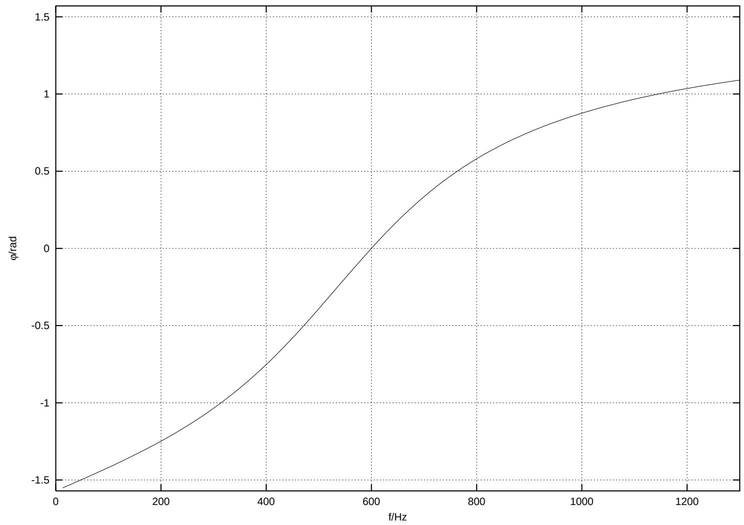
- Die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz f beträgt

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{2\,\pi\,f\,L - \frac{1}{2\,\pi\,f\,C}}{R}\right) \qquad f \neq 0$$

Ist die Frequenz $f = 0\,\mathrm{Hz}$ (Gleichstrom) so ist der Widerstand des Kondensators unendlich hoch und es fließt kein Strom, dessen Phasenveschiebung man messen könnte [2]. Bei sehr kleinen Frequenzen dominiert also der Kondensator und die Phasenverschiebung ist nahezu $\varphi_\mathrm{C} = -90^\circ$. Bei der Resonaz-frequenz ist keine Phasenverschiebung vorhanden. Je höher die Frequenz ist, umso mehr dominiert der induktive Widerstand und die Phasenverschiebung strebt gegen die einer rein induktiven Schaltung mit $\varphi_\mathrm{L} = +90^\circ$. Das Schaubild sieht also folgendermaßen aus:

[2] Es existiert jedoch ein Grenzwert für die Phasenverschiebung, der der Phasenverschiebung einer rein kondensativen Schaltung entspricht

$$\varphi_\mathrm{C} = \lim_{f\to 0} \arctan\left(\frac{2\,\pi\,f\,L - \frac{1}{2\,\pi\,f\,C}}{R}\right) = -\frac{\pi}{2}$$



- Für die Wirkleistung gilt

$$\overline{P} = I_{\text{eff}}\, U_{\text{eff}}\, \cos\varphi_0 = 2,68\,\text{mA} \cdot 1,00\,\text{V} \cdot \cos(-71,5^\circ) = \underline{\underline{0,848\,\text{W}}}$$

c) • Der induktive Widerstand beträgt hier

$$X_{\text{L}} = 2\,\pi\,f\,L = 2\,\pi \cdot 600\,\text{Hz} \cdot 35,2\,\text{mH} = 132,7\,\Omega$$

Bei $f = 600\,\text{Hz}$ tritt der Ressonanzfall ein (s.o.), sodass induktiver und kapazitativer Widerstand gleich sind. Die Stromstärke beträgt nach Gl. 1 8,5 mA.

Der Kondensator erreicht seine maximale Feldenergie, bei der höchsten an im anliegenden realen Spannung (nicht der effektiven). Sie beträgt bei ihm

$$\hat{U}_{\text{C}} = \sqrt{2}\,U_{\text{C,eff}} = \sqrt{2}\,X_{\text{C}}\,I_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 132,7\Omega \cdot 8,5\,\text{mA} = 1,60\,\text{V}$$

Sie elektrische Scheitelfeldenergie beträgt also

$$\hat{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2}\,C\,\hat{U}_{\text{C}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mu\text{F} \cdot 1,60^2\,\text{V}^2 = 2,56\,\mu\text{J}$$

Die höchste magnetische Feldenergie wird bei maximaler Stromstärke erreicht

$$\hat{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\,L\,\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\,L\,(\sqrt{2}\,I_{\text{eff}})^2 = L\,I_{\text{eff}}^2 = 35,2\,\text{mH} \cdot 8,5^2\,\text{mA}^2 = 2,54\,\mu\text{J}$$

Bis aus Rechenungenauigkeiten stimmen also die maximale elektrische und maximale magnetische Feldenergie überein:

$$\hat{E}_{\text{el}} = \hat{E}_{\text{mag}}$$

- Im Ressonanzfall sind die maximale elektrische und magnetische Feldenergie gleich groß. Nur mit dem Unterschied, dass das Eintreten der Maximalwerte um 180° phasenverschoben ist. Die Energien, die im Kondensator bzw. in der Spule gespeichert sind, werden unter allen umständen ohne Energie- bzw. Wärmeverlust abgegeben. Da sowohl Kondensator, als auch die Spule keine Wirkleistung haben, sondern im Ressonanzfall sogar genau entgegengesetzte Spontanleistungen [3], wird die Energie zwischen Spule und Kondensator ausgetauscht wird. Es lässt sich zeigen, dass im Ressonazfall zu jedem Zeitpunkt

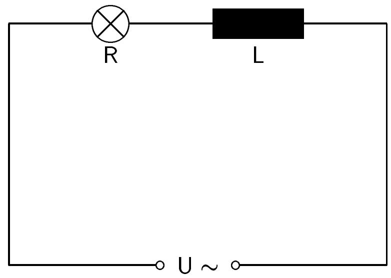
$$E_{\text{el}} + E_{\text{mag}} = \text{const.}$$

gilt.

[3] Dies bedeutet

$$P_{\text{Spule}} = -P_{\text{Kondensator}}$$

d) • Schaltskizze



• Damit das Lämpchen nicht durchbrennt, dürfen an ihm maximal 1,00 V anliegen. Es muss also gelten

$$U_\mathrm{R} = 1,00\,\mathrm{V}$$

Für die am Lämpchen anliegende Spannung gilt

$$U_\mathrm{R} = R\,I_\mathrm{eff} = R \cdot \frac{U_\mathrm{eff}}{Z} = R \cdot \frac{U_\mathrm{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega\,L)^2}}$$

Diese Gleichung lässt sich nach der Induktivität der Spule auflösen

$$L = \frac{\sqrt{(R\,U_\mathrm{eff})^2 - (U_\mathrm{R}\,R)^2}}{U_\mathrm{R}\,\omega} = \frac{R}{U_\mathrm{R}\,\omega} \cdot \sqrt{U_\mathrm{eff}^2 - U_\mathrm{R}^2}$$

womit sich die Induktivität berechnen lässt

$$L = \frac{118\,\Omega}{1,00\,\mathrm{V} \cdot 2\,\pi\,200\,\mathrm{Hz}} \cdot \sqrt{(2,00\,rmV)^2 - (1,00V)^2} = \underline{\underline{163\,\mathrm{mH}}}$$

Bei 200 Hz fällt also bei einer Induktivität von mindestens 163 mH nicht mehr als 1,00 V am Lämpchen ab und es brennt nicht.